PART5 定積分の部分積分法

要点整理と公式

要点 ① 定積分の部分積分法

不定積分の部分積分法の公式より，定積分について次の公式が得られる。

定積分の部分積分法

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx=[f(x)g(x)]_a^b-\int_a^b f'(x)g(x)dx$$

(ex) 定積分 $\int_0^1 x(x-1)^2dx$ を求める。

$$\int_0^1 x(x-1)^2dx=\int_0^1 x\left\{\frac{(x-1)^3}{3}\right\}'dx$$

$$=\left[x\cdot\frac{(x-1)^3}{3}\right]_0^1-\int_0^1\frac{(x-1)^3}{3}dx$$

$$=0-\frac{1}{12}[(x-1)^4]_0^1=\frac{1}{12}$$

[MEMO]

5 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx$　　(2) $\displaystyle\int_{1}^{3}\frac{\log x}{x^2}dx$　　(3) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}x^2\sin x dx$

Point Pickup

定積分の部分積分法

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx=[f(x)g(x)]_a^b-\int_a^b f'(x)g(x)dx$$

第17講 PART5 確認問題

次の定積分を求めよ。

ただし，答えは下の①～④のうちから選べ。

1 $\displaystyle\int_1^2 (x-1)(x-2)^2\,dx=\Big[(x-1)\cdot\boxed{ア}\Big]_1^2-\int_1^2\boxed{イ}\,dx$

$=\boxed{ウ}$

[$\boxed{ア}$, $\boxed{イ}$ の選択肢]

① $(x-2)^2$　② $(x-2)^3$

③ $3(x-2)^3$　④ $\dfrac{(x-2)^3}{3}$

[$\boxed{ウ}$ の選択肢]

① $\dfrac{1}{4}$　② $\dfrac{1}{6}$

③ $\dfrac{1}{12}$　④ $-\dfrac{1}{12}$

2 $\displaystyle\int_1^2 x^3\log x\,dx=\Big[\boxed{エ}\cdot\log x\Big]_1^2-\int_1^2\boxed{オ}\,dx$

$=\boxed{カ}$

[$\boxed{エ}$, $\boxed{オ}$ の選択肢]

① $\dfrac{x^3}{2}$　② $\dfrac{x^3}{4}$

③ $3x^4$　④ $\dfrac{x^4}{4}$

[$\boxed{カ}$ の選択肢]

① $2\log 2-\dfrac{7}{8}$　② $4\log 2-\dfrac{15}{4}$

③ $4\log 2+\dfrac{15}{16}$　④ $4\log 2-\dfrac{15}{16}$

3 $\displaystyle\int_0^{\pi} x^2\cos x\,dx = \Big[x^2\cdot \boxed{\text{キ}}\Big]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\boxed{\text{ク}}\,dx$

$= \boxed{\text{ケ}}$

[キ , ク の選択肢]

① $\sin x$　　② $\cos x$

③ $2x\sin x$　　④ $2x\cos x$

[ケ の選択肢]

① 0　　② π

③ 2π　　④ -2π

[MEMO]

PART5 定積分の部分積分法

5 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx$　　(2) $\displaystyle\int_{1}^{3}\frac{\log x}{x^2}dx$　　(3) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}x^2\sin x dx$

[解答]

(1) $$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx=\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)\left\{\frac{(x-\beta)^2}{2}\right\}'dx$$

$$=\left[(x-\alpha)\cdot\frac{(x-\beta)^2}{2}\right]_{\alpha}^{\beta}-\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{2}(x-\beta)^2dx$$

$$=-\frac{1}{6}\left[(x-\beta)^3\right]_{\alpha}^{\beta}=\frac{1}{6}(\alpha-\beta)^3=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

(2) $$\int_{1}^{3}\frac{\log x}{x^2}dx=\int_{1}^{3}\log x\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)'dx$$

$$=\left[\log x\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)\right]_{1}^{3}-\int_{1}^{3}\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)dx$$

$$=-\frac{\log 3}{3}+\int_{1}^{3}\frac{1}{x^2}dx=-\frac{\log 3}{3}+\left[-\frac{1}{x}\right]_{1}^{3}=-\frac{\log 3}{3}+\frac{2}{3}$$

(3) $$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}x^2\sin x dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}x^2(-\cos x)'dx$$

$$=\left[x^2(-\cos x)\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}-\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}2x(-\cos x)dx$$

$$=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}x\cos x dx=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}x(\sin x)'dx$$

$$=2\left[x\sin x\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}-2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}1\cdot\sin x dx=\pi-2\left[-\cos x\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}=\pi-2$$

第17講　PART5 確認問題 解答

1　**[正解]** ア：④，イ：④，ウ：③

[解説]

$$\int_1^2 (x-1)(x-2)^2\,dx$$

$$=\int_1^2 (x-1)\cdot\left\{\frac{(x-2)^3}{3}\right\}'dx \quad \text{[A]}$$

$$=\left[(x-1)\cdot\frac{(x-2)^3}{3}\right]_1^2-\int_1^2\frac{(x-2)^3}{3}dx$$

$$=0-\int_1^2\frac{(x-2)^3}{3}dx$$

$$=\left[-\frac{(x-2)^4}{12}\right]_1^2$$

$$=\frac{1}{12}$$

[A]　定積分の部分積分法

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx$$

$$=[f(x)g(x)]_a^b-\int_a^b f'(x)g(x)dx$$

ここでは，$f(x)=x-1$，$g'(x)=(x-2)^2$ とする。

2　**[正解]** エ：④，オ：②，カ：④

[解説]

$$\int_1^2 x^3\log x dx=\int_1^2\left(\frac{x^4}{4}\right)'\cdot\log x dx \quad \text{[B]}$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}\cdot\log x\right]_1^2-\int_1^2\frac{x^4}{4}\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}\cdot\log x\right]_1^2-\int_1^2\frac{x^3}{4}dx$$

$$=4\log 2-\left[\frac{x^4}{16}\right]_1^2$$

$$=4\log 2-\frac{16-1}{16}$$

$$=4\log 2-\frac{15}{16}$$

[B]　定積分の部分積分法

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx$$

$$=[f(x)g(x)]_a^b-\int_a^b f'(x)g(x)dx$$

ここでは，$f(x)=\log x$，$g'(x)=x^3$ とする。

3 **[正解]** キ：①，ク：③，ケ：④

[解説]

$$\int_0^{\pi} x^2 \cos x dx = \int_0^{\pi} x^2 (\sin x)' dx$$

$$= \left[x^2 \sin x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2x \sin x dx \quad \text{[C]}$$

$$= -\int_0^{\pi} 2x \sin x dx$$

$$= \int_0^{\pi} 2x(\cos x)' dx \quad \text{[D]}$$

$$= \left[2x \cos x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2 \cos x dx$$

$$= -2\pi - \left[2 \sin x\right]_0^{\pi}$$

$$= \mathbf{-2\pi}$$

[C]　定積分の部分積分法

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx$$

$$= \left[f(x)g(x)\right]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

ここでは，$f(x) = x^2$，$g'(x) = \cos x$ とする。

[D]　さらに部分積分法を使う。